ملخص

تعريف عام

المعادلة التفاضلية هي معادلة اين يكون المجهول دالة و يرمز لها بـ y و تحتوى المعادلة على y و مشتقاتها اضافة الى متغير الدالة x.

طريقة الحل في الحالة العامة

1. نقوم بحل المعادلة بدون الطرف الثاني.
2. نبرهن ان دالة g حل للمعادلة.
3. نبرهن ان f حل للمعادلة يكافئ $(f\text{-}g)$ حل للمعادلة.
4. نستنتج حلول المعادلة او الحل الوحيد اذا اعطيت الشروط الاولية.

الدرجة الاولى

معادلة من الشكل $y'+ay=0$

الحل هو $f(x)=y=ke^{-ax}$ حيث k عدد حقيقي.

معادلة من الدرجة الاولى بطرف ثانى $y'+ay=b$

الحل هو $f(x)=y=ke^{-ax}-\frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي.

الشروط الابتدائية

اذا كان $f(x_0)=y_0$ (الشرط الابتدائ) فان المعادلة تقبل حلا واحدا.

مثال

حل المعادلة $4y'-y=6$ حيث $f(0)=y(0)=4$

الحل

هذه المعادلة نستطيع ان نكتبها على الشكل

$y'-\frac{1}{4}y=\frac{3}{2}$ اذن فهي من الشكل $y'+ay=b$

الحلول تكون على الشكل $f(x)=y=ke^{\frac{1}{4}x}-6$

باستخدام الشرط الابتدائى نتحصل على الحل الوحيد للمعادلة

اذن $f(0)=y(0)=4$

$$f(0)=y(0)=0 \Leftrightarrow ke^{\frac{1}{4}\times 0}-6=4 \Leftrightarrow k-6=4$$

و منه $k=10$

و عليه الحل الوحيد للمعادلة هو $y=10e^{\frac{1}{4}x}-6$.

الدرجة الثانية

معادلة من الشكل $y''+\omega^2 y=0$

الحل هو جميع الدوال على الشكل

$y=f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$ حيث A و B عددان حقيقيان.

باستخدام الشروط الاولية $f(x_0)=\alpha$ و $f'(x_0)=\beta$ نتحصل على الحل الوحيد للمعادلة.

تمارين

تمرين 1

1. حل المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ (1)
2. نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+2y=5cox$ (2)

عين العددين الحقيقيين a و b حتي تكون الدالة g المعرفة على R بـ $g(x)=a\cos x+b\sin x$ حلا للمعادلة

3. بين أن f هي حل للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كانت $(f\text{-}g)$ حل للمعادلة (1) .
4. إستنتج حلول المعادلة .

الحل

1. حل المعادلة (1) هو

$y=ke^{-2x}$

2. حتى تكون g حلا للمعادلة يجب

$g'(x)+2g(x)=5cox$

اذن

$-a\sin x+b\cos x+2a\cos x+2b\sin x=5\cos x$

اي ان $(2a+b)\cos x+(2b-a)\sin=5\cos x$

اذن

$$\begin{cases}2a+b=5\\2b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2b=10\\2b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a=10\\2b=a\end{cases}$$

و منه نجد $a=2$ و $b=1$.

اذن $g(x)=2\cos x+\sin x$ هو احد حلول المعادلة (2).

3. $(f\text{-}g)$ حلا للمعادلة (1) يعني

$(f-g)'+2(f-g)=0 \Leftrightarrow f'+2f=g'+2g=5\cos x$

و هذا يعني ان f حلا للمعادلة (2).

4. الاستنتاج : $(f\text{-}g)$ حلا للمعادلة (1) يعني ان

$f(x)-g(x)=ke^{-2x} \Leftrightarrow f(x)=ke^{-2x}+2\cos x+\sin x$

تمرين 2

حل المعادلة التفاضلية $y'+2y=e^x+3$.

تمرين 3

حل المعادلة التفاضلية $y'+y\ln 3=0$.

تمرين 4

حل المعادلتين التفاضليتين

$y''+4y=0$

$9y''=-\pi^2 y$